Дәріс №13. Қисық сызықты интеграл

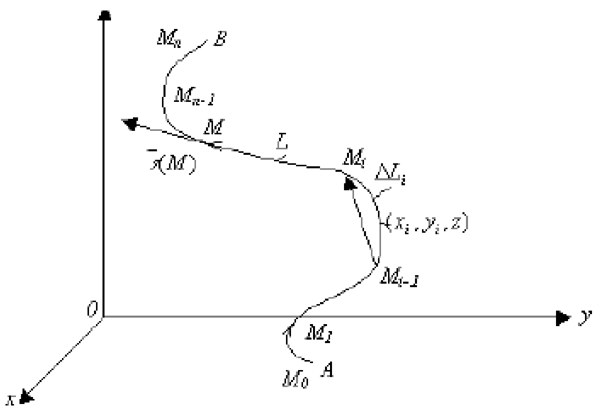
Дәрістің мақсаты: I- және II- текті қисықсызықты интегралдардың негізгі түсініктерін, қасиеттерін және есептеу әдістерін баяндау.

1. Доғаның ұзындығы бойынша қисықсызықты интеграл.

Кеңістіктегі өзі мен өзі қиылыспайтын $L = \breve{A}B \in R_3$ (3 сурет) қисығының нүктелерінде анықталған $f(M) = f(x, y, z)$ функциясын қарайық. Қисықты $A = M_0, M_1, ..., M_n = B$ нүктелерімен қалауымызша өзара айқаспайтын n бөлікке ΔL_i бөлейік: $\sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = L$. Әрбір бөліктен қалауымызша $(x_i, y_i, z_i) \in \Delta L_i$ нүктесін алып, функцияның сол нүктелердегі мәндерін тауып, оларды сәйкес бөліктер доғаларының ұзындықтарына көбейтіп, қосалық. Пайда болған өрнек

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta L_i \qquad (2.1)$$

$f(x, y, z)$ функциясы үшін L қисығы доғасының ұзындығы бойынша құрылған



3 сурет – Қисықсызықты интегралдар

интегралдық қосынды деп аталады. Құраушы доғалар ұзындықтарының ең үлкені:

$$\lambda = \max_{i=\overline{1,n}}\{\Delta L_i\}, \;\; \lambda \to 0 \;\; \Leftrightarrow \;\forall \Delta L_i \to 0, \;\; n \to +\infty$$

қисықты бөлшектеу қадамы деп аталады.

Анықтама. Егер $\lambda \to 0$- да (2.1) интегралдық қосындысының қисықты бөлшектеу және бөліктерден (x_i, y_i, z_i) нүктелерін таңдау әдістерінен тәуелсіз нақты шегі бар болса, онда сол сан $f(x, y, z)$ функциясынан L қисығы доғасының ұзындығы бойынша (I-текті) қисықсызықты интеграл деп аталып, $\int_L f dL$ деп белгіленеді.

$$\int_L f(x,y,z)dL = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta L_i \,. \qquad (2.2)$$

Теңдіктің оң жағындағы шек бар (нақты санға тең) болса, онда $f(x,y,z)$-ді L қисығы доғасының ұзындығы бойынша интегралданатын функция дейді.

Теорема. Егер $f(x,y,z)$ функциясы L қисығының нүктелерінде үзіліссіз болса, онда сол қисық доғасының ұзындығы бойынша функция интегралданады.

Есептеу барысында I-текті қисықсызықты интеграл анықталған интегралға келтіріледі. Сондықтан интегралдың негізгі қасиеттері қисық доғасының ұзындығы бойынша алынған интегралға да тән. I-текті қисықсызықты интегралдың мәні интегралдау айнымалыларының белгілеулерінен және интегралдау қисығы бойымен доға ұзындықтарын есептеу бағытынан тәуелсіз. Қисық $L = L_1 + L_2$ доғасы ұзындығы бойынша интегралданатын $f_i(M), i = \overline{1,k}$ функциялары үшін аддитивтік және біртектілік қасиеттер орындалады:

$$\int_L \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(M)dL = \sum_{i=1}^{n} C_i \int_L f_i(M)dL, \quad \int_L = \int_{L_1} + \int_{L_2}.$$

I-текті қисықсызықты интегралдың есептеуі интегралдау қисығының берілу әдісіне байланысты.

1. Кеңістікте интегралдау қисығы өзінің параметрлік теңдеулерімен:

$$L:\quad x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t)\qquad \alpha \le t \le \beta \qquad (2.3)$$

берілсін. Интервалда (α,β) L тегіс қисық, яғни (2.3) дифференциалданатын функциялар болсын:

$$dx = x'(t)dt,\qquad dy = y'(t)dt,\qquad dz = z'(t)dt.$$

Сонда I-текті қисықсызықты интеграл анықталған интегралға айналады:

$$\int_L f(x,y,z)dL = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt\,.$$

2. Интегралдау қисығы жазық: $L \in R_2$ болса, ол параметрлік түрде (2.3) теңдеулерінің алғашқы екеуімен ғана анықталады. Мұндай қисық бойынша I-текті қисықсызықты интегралды есептеу формуласы

$$\int_L f(x,y)dL = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \qquad (2.4)$$

түрінде жазылады.

--

3. Жазық қисық L (a,b)-да үзіліссіз дифференциалданатын $y=\varphi(x)$ функциясының сызбазы болса, онда тәуелсіз айнымалыны x параметр ретінде қабылдап,

$$x=x,\quad y=\varphi(x),\quad a\le x\le b \tag{2.5}$$

деп жаза аламыз; (2.4) формуласы

$$\int_L f(x,y)dL=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+y_x'^2}\,dx \tag{2.6}$$

түріне енеді.

4. Енді жазық қисық өзінің полярлық координаталардағы теңдеуімен берілсін

$$L:\quad \rho=\rho(\varphi)\quad \alpha\le\varphi\le\beta.$$

Қисық доғасы ұзындығының элементі [1]:

$$dL=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi,\ \ x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi$$

болғандықтан

$$\int_L f(x,y)dL=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi.$$